

# PHÂN TÍCH ỨNG XỬ PHI TUYẾN CỦA KHUNG PHẪNG BÊ TÔNG CỐT THÉP CÓ TƯỜNG XÂY CHÈN

ThS. ĐINH LÊ KHÁNH QUỐC, PGS.TS. BÙI CÔNG THÀNH  
PGS.TS. NGUYỄN VĂN YÊN  
Đại Học Bách Khoa TP. Hồ Chí Minh

Tóm tắt: Bài báo trình bày phân tích ứng xử phi tuyến của khung - tường xây chèn bằng mô hình phần tử hữu hạn (PTHH) sử dụng thanh liên kết tương đương chịu nén lý tưởng "gap element", so sánh kết quả thu nhận được với các nghiên cứu đã được công bố.

## 1. Mở đầu

Khung có tường xây chèn do Polyakov [1] đặt nền tảng nghiên cứu từ năm 1960 và tiếp tục được nghiên cứu, hoàn thiện cho đến ngày nay. Mỗi nghiên cứu đều có một hướng tiếp cận và quan điểm giải quyết riêng, song nhìn chung đều thừa nhận tường xây chèn trong khung làm việc tương tự như một thanh chống chịu nén (hình 1). Bề rộng của dải tường xây chèn chịu nén trong khung (thanh chống tương đương) đã được nhiều nhà nghiên cứu đề xuất [1-9]. Tại Thành phố Hồ Chí Minh (Tp.HCM) - Việt Nam, tường xây chèn trong khung bê tông cốt thép (BTCT) được sử dụng phổ biến trong các công trình xây dựng dân dụng, đặc biệt đối với các nhà chung cư, tường xây chèn trong khung chiếm tỉ trọng rất lớn và có thể góp phần tăng độ cứng ngang tổng thể của công trình. Tuy nhiên trong tính toán hiện nay, đa phần chỉ xem tường xây chèn trong khung là tải trọng, bỏ qua độ cứng. Điều này có thể thiên về an toàn nhưng chưa phản ánh đúng ứng xử thật của công trình.

## 2. Cơ sở lý thuyết tính toán

Polyakov và các nhà nghiên cứu trước đây [1-9] đã tiến hành khảo sát lý thuyết và thực nghiệm cho thấy tường xây chèn trong khung làm việc tương tự như một thanh chống tương đương chịu nén có liên kết khớp nối từ góc điểm đặt lực đến góc chéo đối diện (hình 1b). Các nghiên cứu này đều dựa trên một số giả thuyết để xác định độ cứng của thanh chống tương đương (bề rộng quy đổi tương đương của tường chèn).

Chú giải các ký hiệu:

- P - Lực nén trong thanh chống tương đương;
- L - Bề rộng tính từ tim của khung có tường xây chèn;
- h - Chiều cao tính từ tim của khung có tường xây chèn;
- $d_{\text{t}}$  - Bề dày của tường xây chèn;
- l' - Chiều dài của tường xây chèn trong khung;
- h' - Chiều cao của tường xây chèn trong khung;
- $\alpha_n = h_c$  - Chiều dài đoạn tiếp xúc giữa cột và tường xây chèn;
- $\alpha_f = b$  - Chiều dài đoạn tiếp xúc giữa dầm và tường xây chèn;
- $E_f = E_w = E_0 = E_m$  - Mô đun đàn hồi của tường xây chèn;
- $E_c = E_f$  - Mô đun đàn hồi của khung BTCT;
- $I_c = J_c$  - Mô men quán tính của cột;
- $I_b = J_b$  - Mô men quán tính của dầm;
- $\theta = \arctg(h'/l')$  - góc so với phương ngang của đường chéo tường xây chèn;
- $b_c$  - Bề rộng của tiết diện cột khung;
- $b_b$  - Bề rộng của tiết diện dầm khung;
- $k_0$  - Hệ số nền Winkler của tường xây chèn;
- $\sigma$  - Ứng suất trong tường xây chèn;
- R - Cường độ chịu nén giới hạn trung bình của tường xây chèn;
- k - Hệ số an toàn của tường xây chèn;
- $f_w$  - Cường độ chịu nén của tường xây chèn (ACI 530);
- $f_{c(28)}$ : Cường độ chịu nén của mẫu bê tông khung ở 28 ngày (ACI 318). Trong bài báo được quy đổi từ mẫu lập phương 150x150x150mm;
- $\alpha_c$  - Hệ số nở hông của bê tông khung;
- $\alpha_m$  - Hệ số nở hông của tường xây chèn;
- $W_0 = W_{ds} = W_{inf}$  - Bề rộng thanh chống tương đương.

## 2.1 Các giả thuyết và công thức tính toán của Polyakov và các nhà nghiên cứu trước đây

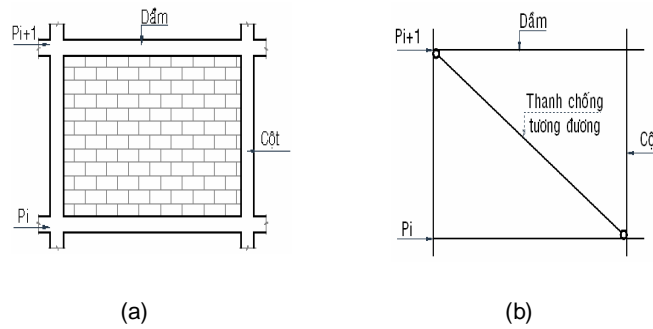
### 2.1.1 Các giả thiết

- Vật liệu là đồng nhất, đẳng hướng;
- Nút khung cứng (không bị biến dạng);
- Tường xây chèn và khung tiếp xúc kín khít với nhau cả bốn mặt.

### 2.1.2 Công thức tính toán

\* Polyakov (1960) [1]:

Dựa trên nghiên cứu thực nghiệm công phu, Polyakov đã đề xuất thay thế tường xây chèn trong khung bằng thanh chống tương đương có liên kết khớp ở hai đầu nối từ góc khung có điểm đặt lực đến góc đối diện (hình 1).



Hình 1. Mô hình tường xây chèn làm việc tương đương thanh chống chịu nén lý tưởng

Biến dạng co của thanh chống tương đương.

$$\varepsilon = D_c \left( \frac{2P}{l.d} \right)^2 \quad (1)$$

Trong đó:

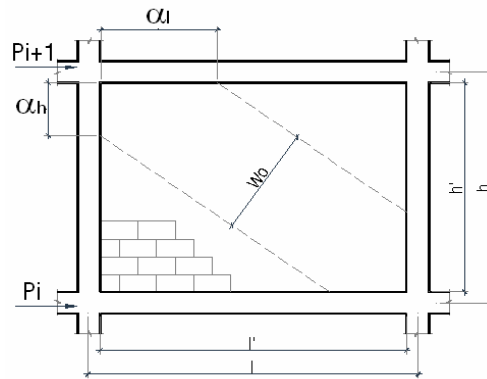
$$D_c = 119.10^{-6} [\beta(\beta - 2) + 293] \quad (2)$$

$$\beta = \frac{l}{h} \quad (3)$$

\* Smith (1962) [2]:

Bề rộng thanh chống tương đương.

$$W_o = \sqrt{\alpha_h^2 + \alpha_l^2} \quad (4)$$



Hình 2. Mô hình thanh chống tương đương Smith [2]

Trong đó:

$$\alpha_h = \frac{\pi}{2\lambda_h}; \alpha_l = \frac{\pi}{\lambda_l} \quad (5)$$

$$\lambda_h = \sqrt[4]{\frac{E_w \cdot d}{4 \cdot E_f \cdot I_c \cdot h}} \sin 2\theta \quad (6)$$

$$\lambda_l = \sqrt[4]{\frac{E_w \cdot d}{4 \cdot E_f \cdot I_b \cdot l}} \sin 2\theta \quad (7)$$

\* Mainstone (1971) [3]:

$$W_{ds} = 0,175 \sqrt{l^2 + h^2} (\lambda_h h)^{-0,4} \quad (8)$$

\* Liauw và Kwan (1984) [4].  $W_{ds} = \frac{0,95h \cos \theta}{\sqrt{\lambda_n h}}$  (9)

\* Lý Trần Cường (1991) [5]:

$$W_{ds} = (l_b h + h_c l) \sqrt{\frac{\sin 2\theta}{2l.h}} \quad (10)$$

Trong đó:

$$l_b = \frac{\pi}{m_b} \quad (11)$$

$$h_c = \frac{1}{m_c} \arctg \left[ \frac{1}{\frac{3}{2m_c h} + 1} \right] \quad (12)$$

$m_b$  - Đặc trưng độ cứng của dầm trên nền đàn hồi.

$$m_b = \sqrt[4]{\frac{k_0 b_b}{4E_0 J_b}} \quad (13)$$

$m_c$  - Đặc trưng độ cứng của cột trên nền đàn hồi.

$$m_c = \sqrt[4]{\frac{k_0 b_c}{4E_0 J_c}} \quad (14)$$

Độ cứng của thanh chống tương đương được xác định theo công thức:

$$C = W_{ds} . t . E_0 \left( 1 - \frac{\sigma}{1,1.k.R} \right) \quad (15)$$

\* Cheng L.W (1995) [6]:  $W_{ds} = \frac{l}{4 \sin^3 \theta} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16}{15} \text{tg}^2 \theta}} \right)$  (16)

\* A.J. Kappos (1998) [7]:

Độ cứng của thanh chống tương đương là đường cong tuyến tính ba đoạn, trong đó giai đoạn đàn hồi độ cứng của thanh được xác định như sau:

$$k_w = 1,71 f_w \left( 80 + \frac{h}{d} \right) \quad (17)$$

\* Tiêu chuẩn Canada CSA (S304.1-04)-2004 [8]:

$$W_{ds} = \sqrt{\alpha_h^2 + \alpha_l^2} \quad (18)$$

Trong đó:

$$\alpha_h = \frac{\pi}{2} \sqrt[4]{\frac{4.E_f . I_c . h}{E_m . t . \sin 2\theta}} \quad (19)$$

$$\alpha_l = \pi \sqrt[4]{\frac{4.E_f . I_b . l}{E_m . t . \sin 2\theta}} \quad (20)$$

\* Tiêu chuẩn Mỹ MSJC (TMS 602/ACI 530.1/ASCE 6)-2010 [9].

$$W_{inf} = \frac{0,3}{\lambda_{strut} \cos \theta} \quad (21)$$

$$\lambda_{strut} = \sqrt[4]{\frac{E_m . t . \sin 2\theta}{4.E_c . I_c . h}} \quad (22)$$

### 3. Mô hình phần tử hữu hạn (PTHH)

Mô hình PTHH đã được các nhà nghiên cứu trước đây sử dụng để tính toán khung có tường xây chèn như R.T Severn, D.V Mallick-(1968) [10]... song điều kiện biên sử dụng chưa phù hợp với thực nghiệm về

ứng xử của khung – tường xây chèn. Một số tác giả khác đã có xét đến hiện tượng tách ra của tường xây chèn và khung như P.G.Asteris-(2008) [11]; I.N.Doudoumis-(2006) [12]; J.Dorji và D.P.Thambiratnam - (2009) [13]. Các thực nghiệm trước đây [7],[14] đã chỉ ra rằng khung và tường xây chèn tương tác với nhau thông qua bề mặt tiếp xúc quanh chu vi của tường xây chèn và chúng có thể tách nhau ra tùy thuộc vị trí, độ lớn tác dụng của lực ngang cũng như độ cứng của khung. Do vậy nếu không xét đến vấn đề này, các phần tử có nút nằm trên giao diện khung và tường xây chèn sẽ có ứng xử không phù hợp dẫn đến sai số tính toán lớn. Mô hình PTHH đề cập sau đây đã khắc phục nhược điểm này.

### 3.1 Bài toán tiếp xúc, mô hình PTHH của H.S Jing và M.L Liao [15]

Xét hai vật thể A và B tiếp xúc nhau chịu lực bất kỳ (hình 3) với các giả thuyết sau:

- Vật thể tiếp xúc A và B là đàn hồi tuyến tính;
- Biến dạng nhỏ;
- Lực ma sát xuất hiện tại vùng tiếp xúc tuân theo quy luật Coulomb.

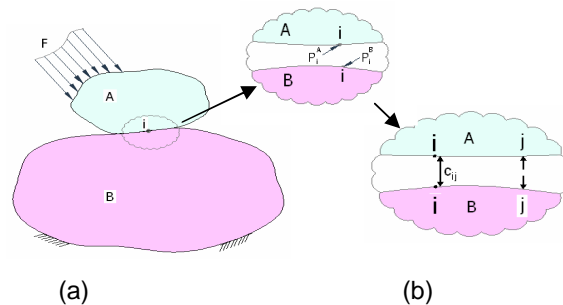
Tại “cặp nút i” ở bề mặt tiếp xúc giữa hai vật thể A và B có phản lực tiếp xúc  $p_i^A$  và  $p_i^B$ , ở trạng thái cân bằng quan hệ giữa lực tiếp xúc và chuyển vị tuân theo quy luật.

$$\delta_i^A = \sum_{j=1}^m C_{ij}^A p_j^A \quad (23) \quad \delta_i^B = \sum_{j=1}^m C_{ij}^B p_j^B \quad (24)$$

Trong đó:

$m$  - tổng số nút tại vùng tiếp xúc;

$C_{ij}$  - ma trận phụ của A hoặc B bằng cách loại bỏ các nút ngoài vùng tiếp xúc.



Hình 3. Mô hình hai vật thể tiếp xúc

Nếu trước và sau khi biến dạng, nút i không tách rời nhau thì phải đảm bảo điều kiện.

$$\delta_i = \delta_i^A + \delta_i^B \quad (25)$$

Trong đó:

$\delta_i$  - Tổng biến dạng xâm nhập tại “cặp” nút i do ngoại lực gây ra khi không có hiện diện của lực tiếp xúc.

Thay phương trình (23) và (24) vào (25) ta có:

$$\delta_i = \sum_{j=1}^m (C_{ij}^A p_j^A + C_{ij}^B p_j^B) \quad (26)$$

Nhận xét tại điểm tiếp xúc  $j$  bất kỳ đang xét  $p_j^A$  và  $p_j^B$  luôn bằng nhau và ngược chiều nên có thể biểu diễn bằng một biến  $p_j$ . Bằng cách này sử dụng ma trận tương thích để có thể biến đổi phương trình (26) có hai biến thành phương trình (27) chỉ có một biến.

$$\delta_i = \sum_{j=1}^m (C_{ij} p_j) \quad (27)$$

Hệ số tương thích  $C_{ij}$  đại diện cho chuyển vị tương đối của nút  $i$  gây ra bởi cặp lực tiếp xúc ở nút  $j$  (hình 3b).

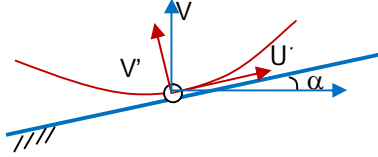
Tại bề mặt tiếp xúc khi không xảy ra trượt, lực ma sát tỉ lệ thuận với lực pháp tuyến là ẩn số chưa biết.

$$p_i = \pm \mu \cdot p_n \quad (28)$$

Trong đó:

$\mu$  - Hệ số ma sát nghỉ.

Khi xảy ra trượt, lực ma sát cũng tỉ lệ thuận với lực pháp tuyến trên một mặt phẳng trượt nghiêng một góc  $\alpha$  so với phương ngang. Trong trường hợp này mối quan hệ trên biên nghiêng như hình 4.



Hình 4. Quan hệ biến đổi trên biên nghiêng

$$V = U \cdot \tan \alpha \quad (29)$$

Liên quan giữa  $(U, V)$  và  $(U', V')$  được thể hiện qua ma trận chuyển  $[S]$  như sau:

$$[U'] = [S][U]$$

Phương trình cơ bản của phương pháp PTHH.

$$[K][U] = [F] \quad (30)$$

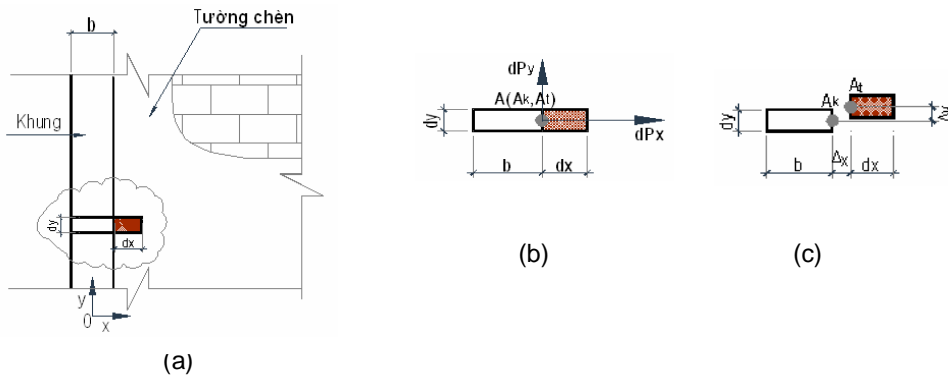
$$\Leftrightarrow [S][K][U] = [S][F]$$

$$\Leftrightarrow [S][K][S]^{-1}[S][U] = [S][F]$$

$$\Leftrightarrow [K'] [U'] = [F'] \quad (31)$$

### 3.2 Trường hợp khung có tường xây chèn

Xét một phân tử tiếp xúc giữa khung và tường xây chèn (hình 5a) như sau:

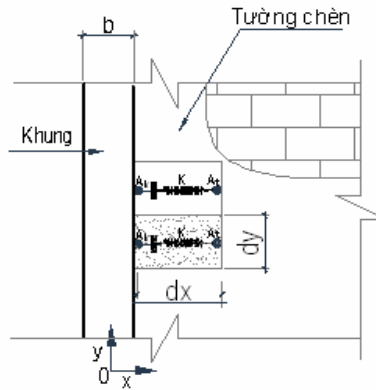


Hình 5. Mô hình phân tử tiếp xúc khung – tường xây chèn

Gọi  $A_k$  là điểm giữa của phân tử cột,  $A_t$  là điểm giữa phân tử tường của phân tử đang xét. Tùy tương tác giữa tường xây chèn và khung sẽ có hai trường hợp.

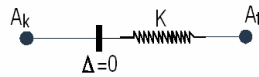
- $A_k$  và  $A_t$  chập nhau tại A (hình 5b);
- $A_k$  và  $A_t$  tách nhau một khoảng  $\Delta$  (hình 5c).

Xem khung là phần tử thanh, tường là phần tử tấm, bỏ qua ma sát giữa bề mặt tiếp xúc thì có thể thay thế các phần tử tấm tiếp giáp giữa khung và tường xây chèn bằng thanh liên kết tương đương chịu nén lý tưởng “gap element” (hình 6).



**Hình 6.** Mô hình thay thế phần tử tấm tiếp xúc bằng thanh liên kết tương đương chịu nén lý tưởng

Cấu tạo thanh liên kết tương đương chịu nén lý tưởng “gap element” [16] minh họa trong hình 7, gồm một lò xo có độ cứng  $k$ , truyền lực nén thông qua bề mặt tiếp xúc của tấm tuyệt đối cứng và hoàn toàn không chịu kéo (khi chịu kéo hai tấm tách nhau ra một đoạn  $\Delta \neq 0$ ).



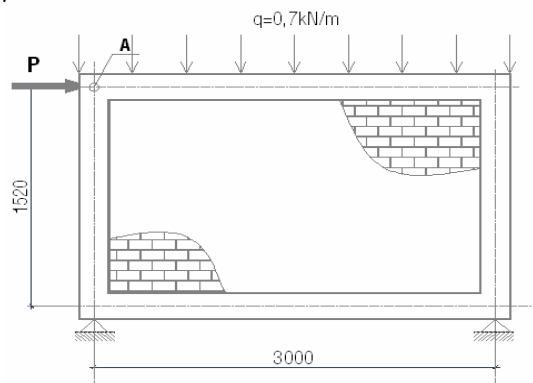
**Hình 7.** Mô hình thanh liên kết tương đương chịu nén lý tưởng

Nếu ta chia lưới phần tử tường tại biên tiếp xúc giữa khung-tường xây chèn là đủ bé để có thể bỏ qua biến dạng  $d(dx, dy)$  của nó (thông thường vào khoảng  $h/20$ ) thì có thể xem  $k = \infty$  để tính toán.

#### 4. Ví dụ tính toán

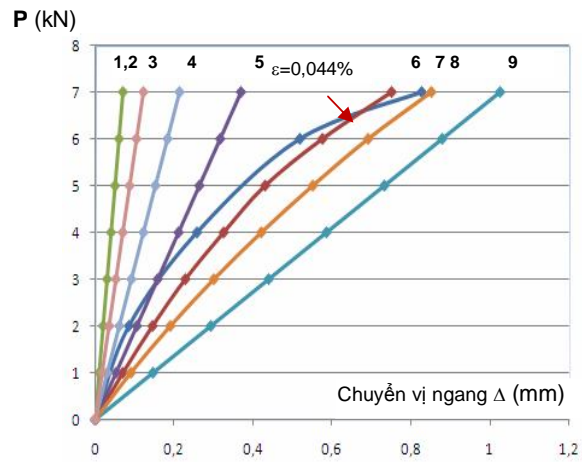
Xét khung BTCT một tầng, một nhịp có tường xây chèn gạch (mô hình thực nghiệm của Lý Trần Cường [5]) với các thông số như sau (hình 8):

- Chiều cao khung:  $h=1,52\text{m}$ ;
- Nhịp khung:  $l=3\text{m}$ ;
- Bề dày tường xây chèn:  $d=100\text{mm}$ ;
- Kích thước tiết diện dầm:  $110 \times 150\text{mm}$ ;
- Kích thước tiết diện cột:  $110 \times 110\text{mm}$ ;
- Cường độ nén của tường xây chèn:  $f_w=4,7\text{Mpa}$ ;
- Cường độ nén của bê tông:  $f'_{c(28)}=10,6\text{Mpa}$ ;
- $E_c=16.900\text{MPa}$ ;  $\alpha_c=0,2$ ;  $\gamma_c=24\text{kN/m}^3$ ;
- $E_m=2.500\text{MPa}$ ;  $\alpha_m=0,15$ ;  $\gamma_m=18\text{kN/m}^3$ .

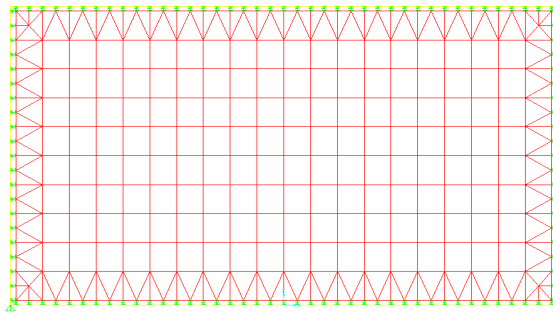


**Hình 8.** Mô hình khung BTCT 1 nhịp, 1 tầng có tường chèn

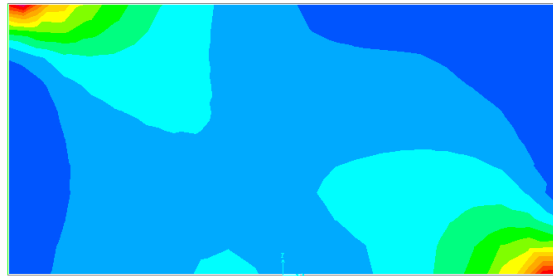
Tính toán phi tuyến trên phần mềm SAP2000.V14, sử dụng “gap element” cho các phần tử tiếp giáp giữa khung và tường xây chèn, phần tử “shell” cho tường và phần tử “frame” cho khung. Lực ngang  $P$  được chia nhỏ và tăng dần theo từng cấp  $P_i=0,5\text{kN}$ , tải trọng đứng không đổi. Kết quả được thể hiện trong hình (9-14).



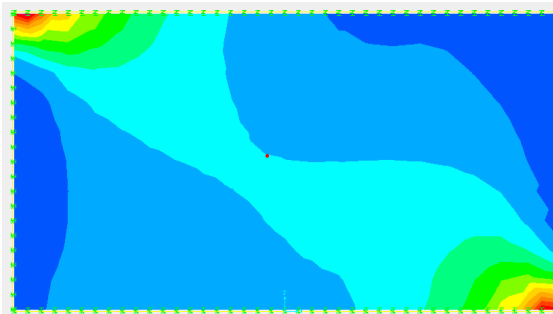
**Hình 9. Biểu đồ lực - chuyển vị (điểm tham chiếu A)**  
 (1): Smith; (2): CSA; (3): Cheng.L.W; (4): Liauw và Kwan (5): Mainstone; (6): Thực nghiệm (Lý Trần Cường)  
 (7): PTHH (Gap element); (8): Lý Trần Cường; (9): MSJC



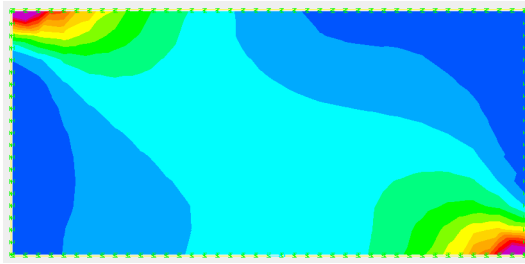
**Hình 10. Sơ đồ chia lưới phần tử và thanh liên kết tương đương chịu nén lý tưởng**



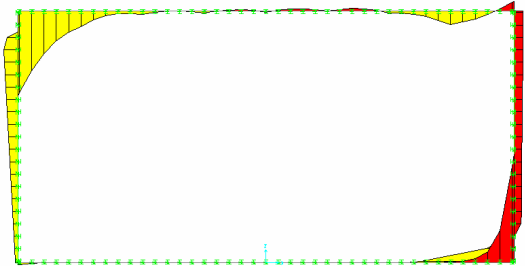
**Hình 11. Ứng suất nén chính trong tường xây chèn (cấp độ P=4kN)**



**Hình 12. Ứng suất nén chính trong tường xây chèn (cấp độ P=5kN)**



Hình 13. Ứng suất nén chính trong tường xây chèn (cấp độ  $P=6kN$ )



Hình 14. Biểu đồ mômen trong khung (cấp độ  $P=6kN$ )

## 6. Nhận xét và kết luận

### a. Nhận xét

- Biểu đồ lực-chuyển vị ( $P-\Delta$ ) tại điểm tham chiếu xác định dựa trên các nghiên cứu trước đây (đường số 1,2,3,4,5,8,9) thay đổi trên dải tương đối rộng và chưa phản ánh rõ ứng xử thực tế của khung-tường xây chèn. Mô hình PTHH sử dụng trong bài báo có kết quả (đường cong số 7) tương đối đồng dạng với đường cong thực nghiệm (đường cong số 6). Tại cấp độ  $P \approx 6,5kN$  tương ứng chuyển vị ngang tương đối tầng (story drift)  $\varepsilon \approx 0,044\%$  hai đường cong này chập nhau;

- Trong quá trình gia tải, khung - tường xây chèn tương tác với nhau qua bề mặt tiếp xúc giữa chúng, tùy thuộc vị trí của bề mặt tiếp xúc, độ lớn của lực ngang tác dụng, độ cứng của khung, đặc tính hình học của khung-tường xây chèn mà bề mặt tiếp xúc có thể ép vào hoặc tách xa nhau. Liên kết thanh liên kết chịu nén lý tưởng sử dụng trong bài báo đã đáp ứng các điều kiện ứng xử này;

- Ứng suất nén chính trong tường xác định bằng mô hình PTHH sử dụng thanh liên kết chịu nén lý tưởng xuất hiện trên dải đường chéo từ điểm đặt lực đến góc đối diện và có bề rộng thay đổi theo từng cấp độ của lực ngang  $P$  (hình 11-13).

### b. Kết luận

Mô hình PTHH sử dụng thanh liên kết tương đương chịu nén lý tưởng “gap element” mô phỏng tương tác bề mặt tiếp xúc khung-tường xây chèn cho kết quả phân tích ứng xử phù hợp với thực nghiệm do Lý Trần Cường thực hiện hơn so với nhiều nghiên cứu trước đây. Trong phân tích ứng xử tĩnh này, có thể bỏ qua ma sát giữa các bề mặt tiếp xúc nhưng cần thiết phải xét đến trong phân tích ứng xử động.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. POLYAKOV S.V., “On The Interaction Between Masonry Filler Walls and Enclosing Frame When Loaded In The Plane Of The Wall”, *Translations in Earthquake Engineering Research Institute*, 1960.
2. SMITH B.S., “Methods for Predicting the Lateral Stiffness and Strength of Multistorey Infilled Frames”, *Bldg Sci.*, Vol.2, 247-257. 1967.
3. MAINSTONE R. J., “On the Stiffness and Strength of Infilled Frames”, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 1971.
4. T.C.LIAUW. and H.K. KWAN., “Nonlinear Analysis of Integral Infilled Frames”, *Computures & Structures*. 1983.
5. LÝ TRẦN CƯỜNG, “Sự làm việc đồng thời của khung BTCT với khối xây chèn dưới tác dụng của tải trọng ngang”, *Luận án Phó tiến sĩ khoa học kỹ thuật*, 1991.
6. CHENG.L.W., “A Seismic Experiment and Equivalent Truss Analysis for Brick Wall with Boundary RC Frame”, *Master thesis, National Chengkung University, Taiwan*, 1995.



7. KAPPOS A.J., STYLIANIDIS, K.C., and MICHALIDIS, C.N., "Analytical Models for Brick Masonry Infilled R/C Frames under Lateral Loading," *Jnl. of Earthquake Engineering*, 2(1), 59-88, 1998.
8. Canadian Standards Association CSA S304.1-04., "Design of Masonry Structure" P.148, 2004.
9. Masonry Standards joint Committee 2010, *MSJC Code p.391*, 2010.
10. MALLICK D.V. and SEVERN T., "The Behaviour of Infilled Frames under Static Loading". *Proc. Instn Civ. Engrs*, Vol. 38, P.639-656. 1967.
11. P.G.ASTERIS., "Finite Element Micro – Modelling of Infilled Frames", *Electronic Journal of Structural Engineering* (8) 2008.
12. I.N.DOUDOUMIS., "Finite Technique Modelling and Investigation of the Behaviour of Elastic Infilled Frames under Monotonic Loading", *Eng.Structures*, vol 29, pp. 1004-1024. 2006.
13. J.DORJI and D.P.THAMBIRATNAM., "Modelling and Analysis of Infilled Frame Structures under Seismic Loads", *The O.C & Bldg tech. Journal*, 2009, 3, 119-126.
14. MEHMET BARAN and TUGCE SEVIL., "Analytical and Experimental Studies on Infilled RC Frame", *International Journal of the Physical Sciences Vol.5(13)*, pp. 1981-1998, 2010.
15. H.S JING and M.L LIAO., "An Improved Finite Element Scheme for Elastic Contact Problems with Friction", *Computures & Structures*. Vol.35, No.5, P. 571-578, 1990.
16. CSI.2000a., "Integrated Software for Structural Analysis and Design", *Analysis Reference Manual, Computure and Structure, Inc., Berkeley, CA*.